

Из анализа собственных форм колебаний следует:

- заполнение труб фундамента бетоном приводит к появлению вблизи рабочей частоты 9,9 Гц двух собственных частот с наиболее опасными собственными формами колебаний (четвертая и пятая), что нежелательно;
- в конструкциях без заполнения труб бетоном ближайшей к 9,9 Гц собственной частоте системы соответствует третья собственная форма колебаний (крутильная), которая является наименее опасной для валопровода.

Проведенное исследование собственных частот и форм различных вариантов системы валопровод-фундамент позволяет сделать следующие выводы:

- заполнение труб фундамента бетоном приводит к увеличению количества собственных частот до рабочей частоты вращения валопровода и появлению вблизи нее собственных частот с наиболее опасными формами колебаний, поэтому использование подобного заполнения не рекомендуется;
- использование комбинированной конструкции фундамента вместо однородной приводит к уменьшению количества собственных частот до рабочей частоты;
- среди рассмотренных вариантов системы валопровод-фундамент наилучшей является конструкция с полым валопроводом и комбинированным фундаментом (табл. 2, № 12).

Список литературы: 1. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем. – Харьков: Вища школа, 1978. – 136 с. 2. Штромберг Ю.Ю., Понасечкин С.А., Копсов А.А. Показатели работы отечественных теплотехнических блоков мощностью 300 МВт // Электрические станции. – 2000. – № 2. – С. 2-4. 3. Абашидзе А.И., Сапожников Ф.В., Казанджян А.Т. Фундаменты машин тепловых электростанций. – М.: Энергия, 1975. – 256 с. 4. Красников С.В. Моделирование опорной конструкции длинного валопровода // Вісник НТУ «ХП». – 2005. – № 20. – С. 121-124.

Поступила в редколлегию 30.08.2006.

УДК 539.3

Л.В.КУРПА, докт.техн.наук; **Е.И.ЛЮБИЦКАЯ**, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

Досліджено геометрично нелінійну поведінку пологих оболонок, виконаних із ортотропних матеріалів, які знаходяться під впливом поперечного навантаження. Пропонується метод лінеаризації нелінійних рівнянь та визначення верхнього та нижнього критичного навантаження, який базується на поєднанні варіаційних методів та теорії R-функцій. Алгоритм застосовано для дослідження ортотропної сферичної пологої оболонки складної форми в плані. Тестові результати для ізотропного матеріалу порівняно із наведеними в літературі.

Geometrically nonlinear behavior of orthotropic shallow shells subjected to the transverse load is investigated. The method of linearization of nonlinear equations and finding of upper and lower critical load, which is based on the combination of variational methods and R-function theory, is proposed. The algorithm is applied to solve problems of orthotropic spherical shallow shells with complex plan form. Test results of isotropic case are compared with those available in the literature.

Данная работа посвящена решению геометрически нелинейных задач изгиба ортотропных пологих оболочек. Нахождение точных решений для системы уравнений с частными производными, описывающей нелинейное поведение тонких пологих оболочек, в общем случае связаны с большими математическими трудностями, поэтому для решения подобных задач применяются различные приближенные методы. Следует заметить, что решение нелинейных краевых задач в рамках геометрически нелинейной теории пластин для областей неканонической формы затруднительно даже при использовании приближенных методов. В данной работе предлагается один из возможных способов решения указанной проблемы. В основу предложенного подхода положены теория R-функций и вариационные методы. Для линеаризации разрешающей системы нелинейных уравнений предложено использовать методы последовательных нагружений и Ньютона-Рафсона [1,2]. На каждом этапе нагружения решение ищется на гиперплоскости, которая строится перпендикулярно прямой, содержащей решения двух предыдущих этапов [3]. Таким образом, последовательно строится вся кривая деформирования оболочки.

Рассмотрим ортотропную пологую оболочку постоянной толщины h , на которую действует равномерно распределенная поперечная нагрузка q . В рамках геометрически нелинейной теории разрешающая система дифференциальных уравнений в смешанной форме может быть записана в безразмерном виде:

$$\frac{E_1}{12E_2(1-\nu_1\nu_2)} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2 \left(\frac{\nu_2 E_1}{12E_2(1-\nu_1\nu_2)} + 2 \frac{G}{12E_2} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{12(1-\nu_1\nu_2)} \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} +$$

$$+ \bar{k}_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \bar{k}_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = Q ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \left(-2\nu_1 \frac{E_2}{E_1} + \frac{E_2}{G} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + \bar{k}_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \bar{k}_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (2)$$

Разрешающая система уравнений дополняется граничными условиями, которые в случае жесткой заделки имеют вид:

$$W = 0 ; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n \partial \tau^2} = 0 . \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$W = w/h, \quad \Phi = \frac{\varphi}{E_2 h^3}, \quad Q = \frac{qb^4}{E_2 h^4}; \quad \xi = x/b, \quad \eta = y/b; \quad \bar{k}_1 = \frac{k_1 b^2}{h}; \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2 b^2}{h}, \quad (4)$$

где w – прогиб, φ – функция напряжений, k_1, k_2 – главные кривизны оболочки, v_1, v_2 – коэффициенты Пуассона, E_1, E_2 – модули упругости материала в направлениях x и y соответственно, G – модуль сдвига.

Линеаризацию нелинейных уравнений (1), (2) предлагается выполнять методом последовательных нагружений, в ходе которого суммарное нагружение разбивается на ряд этапов. На каждом этапе решается линейная задача. Ввиду накопления погрешностей в результате многократного повторения процедуры нагружения, полученное решение рекомендуется уточнять. В данной работе решение уточняется методом Ньютона, который предусматривает следующую линеаризацию:

$$L_1(D_{ij})W_{n+1} - L(W_{n+1}, \Phi_n) - L(W_n, \Phi_{n+1}) = Q - L(W_n, \Phi_n);$$

$$L_2(A_{ij})\Phi_{n+1} + L(W_{n+1}, W_n) = -\frac{1}{2}L(W_n, W_n), \quad (5)$$

где W_n, Φ_n – значения искоемых функций на предыдущей итерации, Q – значение нагрузки, для которой получено решение по методу последовательных нагружений. Более детальное описание этого итерационного процесса может быть найдено в работе [4].

Таким образом, исходная нелинейная задача преобразовывается в последовательность линейных задач, для решения каждой из которых применен вариационно-структурный метод. Согласно вариационному методу Ритца, функции прогиба и напряжений представляются в виде разложения в ряд по полной системе координатных функций:

$$W = \sum_{i=1}^{N_1} a_i W_i, \quad \Phi = \sum_{i=1}^{N_2} a_i \Phi_i. \quad (6)$$

Здесь $\{W_i\}, \{\Phi_i\}$ – последовательности координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям, a_i – неопределенные коэффициенты, которые определяются из условия стационарности соответствующего поставленной задаче функционала.

Для построения последовательностей координатных функций в работе используется теория R-функций, которая позволяет выполнять такие построения для конструктивных элементов со сложной геометрией области, с различными условиями закрепления. Реализация алгоритма выполнена в специализированной программирующей системе POLE-RL [5]. Согласно методу R-функций, строятся структурные формулы, удовлетворяющие заданным граничным условиям. В данной работе используются структурные формулы, удовлетворяющие только главным краевым условиям для заделки:

$$W = \omega^2 P_1; \quad \Phi = P_2. \quad (7)$$

Здесь $\omega(\xi, \eta) = 0$ – уравнение границы рассматриваемой области, P_1, P_2 –

неопределенные компоненты структурных формул, представляют собой разложения по некоторой полной системе функций, например, по степенным полиномам $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i ; \quad P_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i \psi_i . \quad (8)$$

Выполняя подстановку (8) в (7), получаем системы координатных функций для разложения в ряд функции напряжений и прогиба.

При решении задач нелинейного изгиба пологих оболочек возникают трудности с прохождением через критические точки для нагрузки, которые обусловлены неоднозначной зависимостью функции прогиба от параметра нагружения. В настоящей работе эта проблема решена с помощью подхода, предложенного в [3], суть которого описана ниже.

В результате дискретизации задачи вариационно-структурным методом, лиnearизованная система разрешающих дифференциальных уравнений (5) запишется в виде системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{N_2} C_{ij} z_j = Q + b_i , \quad i = \overline{1, N_2} , \quad (9)$$

где N_2 переменных z_j – коэффициенты неопределенных компонент структурных формул (8), $z_{N_2+1} = Q$ – внешняя нагрузка, которая представляется следующим образом:

$$Q = \alpha Q_0 , \quad (10)$$

где α – неизвестная постоянная, Q_0 – заданная функция, которая определяет вид нагружения.

В силу линейности системы (9) допустимо такое представление ее решения:

$$z_j = \alpha \xi_{1j} + \xi_{2j} , \quad (11)$$

то есть (9) разделяется на две системы:

$$\sum_{j=1}^{N_2} C_{ij} \xi_{1j} = Q_0 ; \quad \sum_{j=1}^{N_2} C_{ij} \xi_{2j} = b_i . \quad (12)$$

В $(N_2 + 1)$ -мерном пространстве переменных решение системы (9) ищется итерационно. Пусть на двух шагах нагружения получены решения. В качестве таких решений можно взять тривиальное $z_{1j} = 0$ и решение линейной задачи z_{2j} . Через точки z_{1j} и z_{2j} строим прямую и определяем на ней точку $z_j = z_{1j} + \lambda (z_{2j} - z_{1j})$, где λ – некий параметр, выбираемый специальным образом [4]. Перпендикулярно к прямой строим плоскость, содержащую выбранную точку:

$$\sum_{j=1}^{N_2+1} (z_{2j} - z_{1j}) [z_j - z_{1j} - \lambda (z_{2j} - z_{1j})] = 0 . \quad (13)$$

Параметр нагрузки определяем, выполнив подстановку (11) в (13):

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N_2+1} (z_{2j} - z_{1j}) \left[z_{1j} + \lambda (z_{2j} - z_{1j}) - \xi_{2j} \right] / \sum_{j=1}^{N_2+1} (z_{2j} - z_{1j}) \xi_{1j}.$$

Сходимость итерационного процесса контролируется выполнением неравенства

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{W_i^{(n+1)} - W_i^{(n)}}{W_i^{(n+1)}} \right)^2 + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \left(\frac{\Phi_i^{(n+1)} - \Phi_i^{(n)}}{\Phi_i^{(n+1)}} \right)^2 \leq \varepsilon, \quad (14)$$

где ε – заданная величина относительной погрешности, где $n, n+1$ – номера двух соседних итераций.

Предложенный алгоритм протестирован на ряде примеров. В данной работе в качестве теста рассмотрена задача о геометрически нелинейном изгибе равномерно распределенной нагрузкой q изотропной ($E = 1$; $\nu = 0,3$) полой сферической оболочки толщины h , кривизны k , опирающейся на круглый план радиуса R . Край оболочки жестко закреплён (рис. 1).

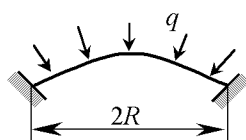


Рисунок 1

\bar{k}		4	5	6	7	8
[6]	Q_B	11,2	17,0	24,9	35,3	49,4
	Q_H	10,0	12,0	15,1	18,0	20,9
Данная работа	Q_B	11,3	17,0	24,8	35,3	49,4
	Q_H	10,2	12,5	15,1	18,1	21,2

Для различных значений кривизны оболочки в безразмерном виде найдены верхнее и нижнее критические значения действующей нагрузки; результаты представлены в таблице, где они сравниваются с данными, полученными ранее в работе [6]. Различие между результатами не превышает 4 %.

Зависимость «нагрузка-прогиб в центре» ортотропной полой оболочки с круглой формой плана, изготовленной из эпоксидоропласта ($E_1/E_2 = 10$; $G/E_2 = 1/3$; $\nu_{12} = 0,22$), жестко защемленной по всему контуру, представлены на рис. 2.

Универсальность разработанного алгоритма относительно формы плана иллюстрируется на примерах сферических оболочек с формой плана, представленной на рис. 3, где $d/R = 0,7$; $c/R = 0,6$. Предполагается, что контур оболочки жестко закреплён. Расчеты выполнены для изотропного материала и эпоксидоропласта. Полученные графики зависимостей «нагрузка-прогиб в центре» представлены на рис. 4 (изотропный материал), и рис. 5 (эпоксидоропласт).

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы: значения верхней и нижней критических нагрузок для рассмотренного ортотропного материала значительно выше по сравнению с Q_B и Q_H для изотропного материала.

При наличии в оболочке боковых вырезов графики зависимостей нагрузка-прогиб имеют более плавный характер, разность между значениями Q_B и Q_H уменьшается, а сами значения критических нагрузок выше, чем для полой оболочки круглой формы плана.

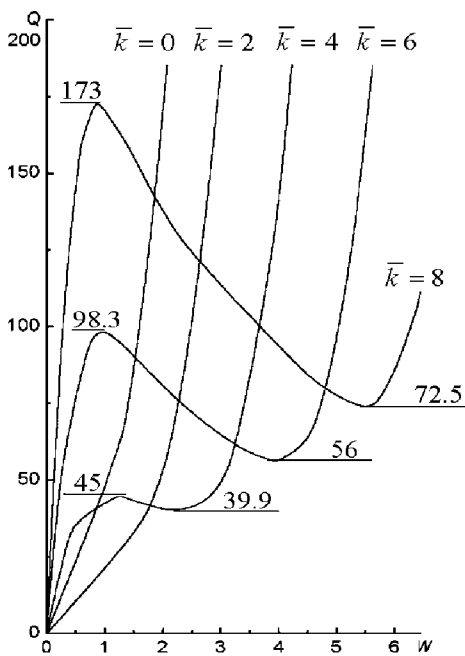


Рисунок 2

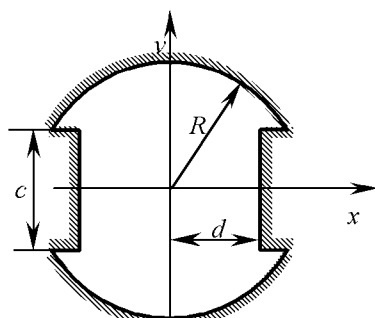


Рисунок 3

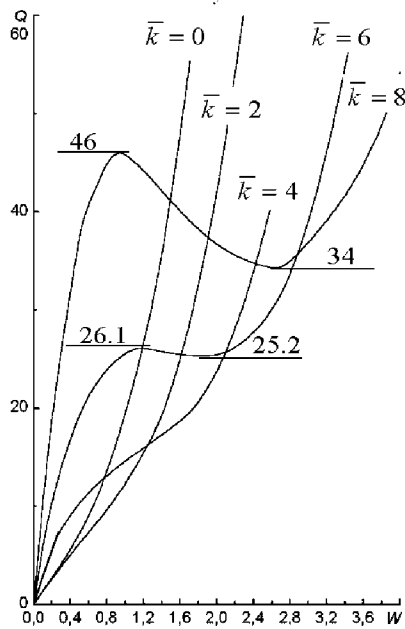


Рисунок 4

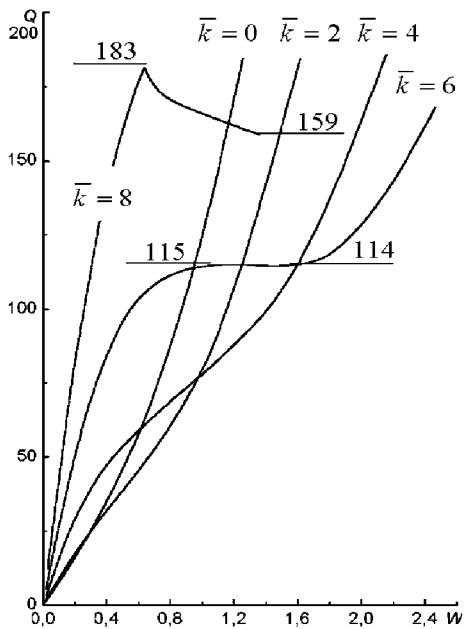


Рисунок 5

Список литературы: 1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К., 1982. – 552 с. 2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 119 с. 3. Трошин В.Г. Об одном подходе к решению геометрически нелинейных задач технической теории оболочек // Прикладная математика и механика. – Т. 47, вып. 1. – 1983. – С. 101-107. 4. Курпа Л.В., Морачковская И.О., Склепус А.Н. Применение метода R-функций к решению нелинейных задач теории полых оболочек // Проблемы машиностроения. – Т. 4, №1-2. – 2001. – С. 58-77. 5. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – К, 1988. – 198 с. 6. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М., 1963. – 880 с. 7. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К., 1987. – 176 с. 8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М., 1974. – 448 с.

Поступила в редколлегию 1.06.2006.

УДК 539.3

Г.И.ЛВОВ, докт.техн.наук; **А.Н.ТКАЧУК**, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ»

О ВЛИЯНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ НА ХАРАКТЕР КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БАНДАЖОМ

Стаття присвячена дослідженню типів взаємодії тонкої циліндричної оболонки з жорстким бандажем, посадженням без попереднього натягу. Відшукані можливі конфігурації зон контакту та отримані розміри контактних зон при різних параметрах оболонки з урахуванням різних гіпотез деформування. Отримані результати відображені у вигляді діаграм на площині варіюваних параметрів.

The article is devoted to research of contact interaction between thin cylindrical shell and rigid bandage. All possible types of contact interaction and lengths of contact zones are obtained for different shell parameters and shell formulations. The obtained results are given by means of diagrams on parameter plane.

Введение. Как известно, в контактных задачах гипотезы деформирования оболочек существенно влияют на результат моделирования, а их применение приводит к различным качественным особенностям [1-8]. Так, решения, полученные с помощью гипотез Кирхгофа-Лява (далее – классическая теория оболочек), имеют сосредоточенные силы на границах зон контакта, а также возможно касание в точке или по линии с ненулевой контактной реакцией. Учет поперечного сдвига устраняет скачок в перерезывающей силе, а касание в точке или по линии реализуется с нулевой контактной силой. Однако на границах зон контакта контактное давление не обращается в ноль. Одной из причин этого является, например, то, что кинематические условия контакта записываются относительно перемещения срединной поверхности, а не лицевой, по которой и происходит контакт. Теории с учетом поперечного обжатия позволяют в первом приближении учесть этот фактор, и при их применении характерно обращение в ноль контактного давления на границах зон контакта и в точках касания. Отдельно следует отметить особенности решения при контакте в угловых точках, где классическая теория и теория с уче-